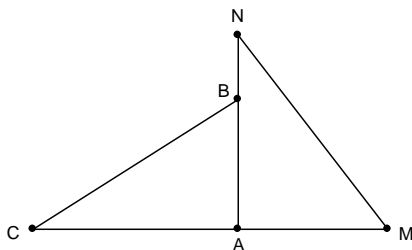


1. Congruența triunghiurilor

1. Fie ΔABC isoscel, cu $[AB] \equiv [AC]$, $M \in [AC]$, $N \in [AB]$ astfel încât $[AM] \equiv [AN]$. Demonstrați că $\angle AMB \equiv \angle ANC$.

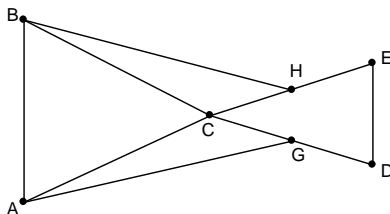
Soluție $\Delta AMB \equiv \Delta ANC$ (LUL)

2. Fie ΔABC , $m(\angle A) = 90^\circ$, $AC = 4$ cm, $AB = 3$ cm. Considerăm punctele $M \in AC$ (A între C și M) și $N \in AB$ (B între A și N) astfel încât $AM = 3$ cm și $BN = 1$ cm. Demonstrați că: a) $[BC] \equiv [MN]$; b) $\angle MNA \equiv \angle ACB$; c) $\angle AMN \equiv \angle ABC$.



Soluție $\Delta ABC \equiv \Delta AMN$ (CC)

3. În figura de mai jos $[AC] \equiv [BC]$, $[DC] \equiv [EC]$, G este mijlocul segmentului $[DC]$, H mijlocul segmentului $[CE]$ și $m(\angle ACE) = m(\angle BCD)$. Arătați că $[AG] \equiv [BH]$.

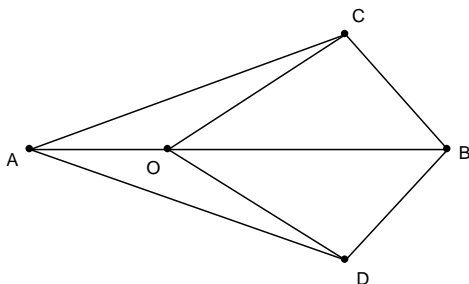


Soluție $m(\angle ACG) = m(\angle ACE) - m(\angle DCE)$

$$\begin{aligned}
m(\angle BCH) &= m(\angle BCD) - m(\angle DCE) \\
\Rightarrow \angle ACG &\equiv \angle BCH \Rightarrow \triangle ACG \equiv \triangle BCH \text{ (LUL)} \\
\Rightarrow [AG] &\equiv [BH].
\end{aligned}$$

4. Fie O un punct pe segmentul [AB], iar C și D de o parte și de alta a dreptei AB, astfel încât $\triangle OBC \equiv \triangle OBD$. Arătați că $[AC] \equiv [AD]$ și că [AB] este bisectoarea unghiului CAD.

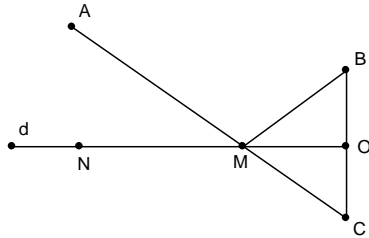
Soluție



$$\begin{aligned}
\text{Dacă } \triangle OBC &\equiv \triangle OBD \Rightarrow [OC] \equiv [OD] \text{ și } \angle COB \equiv \angle BOD \\
\Rightarrow \angle COA &\equiv \angle DOA \text{ (au același suplement)} \\
\Rightarrow \triangle COA &\equiv \triangle DOA \text{ (LUL)} \Rightarrow [AC] \equiv [AD] \text{ și} \\
\angle CAO &\equiv \angle OAD \Rightarrow [AB \text{ este bisectoare}]
\end{aligned}$$

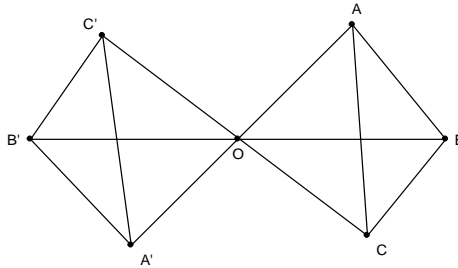
5. În figura alăturată avem: A, M, C și N, M, O puncte coliniare, $BC \perp d$ și O este mijlocul segmentului [BC]. Arătați că: a) $\angle AMN \equiv \angle BMO$; b) $AM + MB = AC$.

Soluție $\triangle OMB \equiv \triangle OMC$ (CC) $\Rightarrow \angle BMO \equiv \angle OMC$ și $[MB] \equiv [MC]$. Dar $\angle AMN \equiv \angle OMC$ (opuse la vârf)
 $\Rightarrow \angle AMN \equiv \angle BMO$ și $AM + MB = AC$.



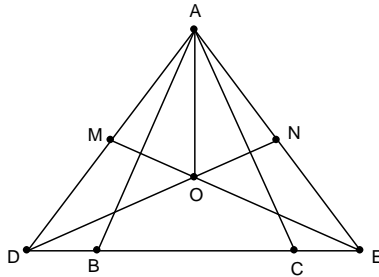
6. Fie punctul B în interiorul unghiului propriu AOC, astfel încât punctele A,B,C să fie necoliniare. Pe semidreptele opuse lui (OA, (OB, (OC se iau respectiv punctele A', B', C' astfel încât $[OA] \equiv [OA']$, $[OB] \equiv [OB']$, $[OC] \equiv [OC']$. Arătați că $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

Soluție



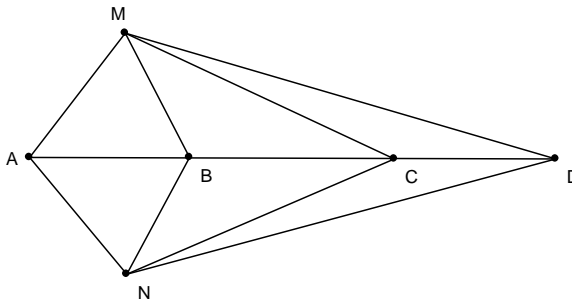
$$\begin{aligned} \Delta AOC &\equiv \Delta A'OC' \text{ (LUL)} \Rightarrow [AC] \equiv [A'C'] \\ \Delta AOB &\equiv \Delta A'OB' \text{ (LUL)} \Rightarrow [AB] \equiv [A'B'] \\ \Delta BOC &\equiv \Delta B'OC' \text{ (LUL)} \Rightarrow [BC] \equiv [B'C'] \\ &\Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \text{ (LLL)} \end{aligned}$$

7. În figura de mai jos se știe că: $[AB] \equiv [AC]$, $\angle ABC \equiv \angle ACB$, $[BD] \equiv [CE]$, M este mijlocul lui [AD] și N mijlocul lui [AE]. Demonstrați că: a) $[AD] \equiv [AE]$; b) $[DN] \equiv [EM]$; c) $\Delta AME \equiv \Delta AND$; d) $\Delta MOD \equiv \Delta NOE$; e) ΔDOE este isoscel; f) $\Delta AOM \equiv \Delta AON$; g) $\Delta AOD \equiv \Delta AOE$.



- Soluție a) $\angle ABD \equiv \angle ACE$ (au același suplement)
 $\Rightarrow \triangle ABD \equiv \triangle ACE$ (LUL) $\Rightarrow [AD] \equiv [AE]$
 b,c) $[AM] \equiv [AN] \equiv [DM] \equiv [EN]$
 $\Rightarrow \triangle ADN \equiv \triangle AEM$ (LUL) $\Rightarrow [DN] \equiv [EM]$;
 d) $\triangle MOD \equiv \triangle NOE$ (ULU)
 e) $[OD] \equiv [OE] \Rightarrow \triangle DOE$ este isoscel;
 f) $\triangle AOM \equiv \triangle AON$ (LLL)
 g) $\triangle AOD \equiv \triangle AOE$ (LLL)

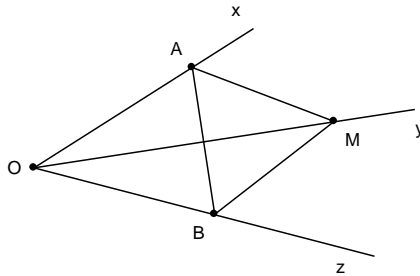
8. Fie punctele coliniare A,B,C,D (în această ordine) iar M și N situate în semiplane opuse determinate de AB astfel încât $\triangle ABM \equiv \triangle ABN$. Arătați că $\triangle CDM \equiv \triangle CDN$.



- Soluție
 $\triangle ABM \equiv \triangle ABN \Rightarrow [MB] \equiv [NB]$ și $\angle ABD \equiv \angle ACE$
 $\Rightarrow \angle ABD \equiv \angle ACE$ (au același suplement)

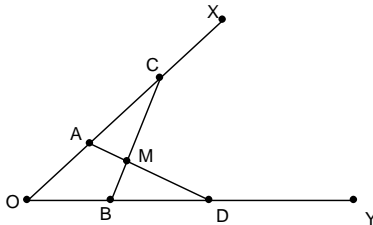
$\Delta MBC \equiv \Delta NBC \Rightarrow [MC] \equiv [NC]$ și $\angle MCB \equiv \angle NCB$
 $\Rightarrow \angle MCD \equiv \angle NCD$ (au același suplement)
 $\Rightarrow \Delta CDM \equiv \Delta CDN$ (LUL)

9. Fie XOY și YOZ două unghiuri adiacente congruente. Dacă $A \in [OX]$, $B \in [OZ]$ și $M \in [OY]$ astfel încât punctele A, M, B sunt necoliniare și $[OA] \equiv [OB]$, arătați că ΔMAB este isoscel.



Soluție $\Delta AOM \equiv \Delta BOM$ (LUL) $\Rightarrow [MA] \equiv [MB]$

10. Pe laturile unghiului XOY construim segmentele $[OA] \equiv [OB]$ și $[OC] \equiv [OD]$. Fie $\{M\} = AD \cap CB$. Să se arate că $[OM]$ este bisectoarea unghiului XOY .



Soluție $\Delta COB \equiv \Delta DOA$ (LUL) $\Rightarrow \angle OCB \equiv \angle ODA$
 $\Delta OMC \equiv \Delta OMD$ (LUL) $\Rightarrow \angle COM \equiv \angle DOM$